Diplomarbeit

Optimierung von Optionen durch effiziente Berechnung optimaler Anfangs-/Randbedingungen für die partielle Black-Scholes-Gleichung in Warrant-Pro-2

Oliver Kubertin

Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik

März 2003

Aufgabensteller und Betreuer:
Prof. Dr. Michael H. Breitner, Universität Hannover

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Thomas Hanschke, Technische Universität Clausthal

Ich erkläre hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Clausthal-Zellerfeld, den 13. März 2003.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Michael H. Breitner bedanken, der mich bei der Erstellung dieser Diplomarbeit sehr gut betreut hat. Die Zusammenarbeit hat mir immer viel Spaß gemacht.
Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Thomas Hanschke für die Begutachtung dieser Arbeit sowie Herrn Prof. Dr. Philip E. Gill, University of California, San Diego, und Herrn Prof. Dr. Michael W. Fagan, Rice University Houston, Texas, für die Bereitstellung von Adifor 2.0.
Mein herzlichster Dank gebührt meiner Frau Silke, die mich auf vielfältige Weise unterstützt und so zum Gelingen dieser Arbeit erheblich beigetragen hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Optionen bzw. 2-Barrieren-Optionen 1
1.2 Optionsgriechen 3
1.3 Delta-Hedging 4
1.4 Black-Scholes-Gleichung 4
1.5 Einführung in Warrant-Pro-2 5

2 Crank-Nicholson-Verfahren **8**

2.1 Herleitung 8
2.2 Lösbarkeit des Gleichungssystemes 12
2.3 Konsistenzordnung des Verfahrens 13
2.4 Stabilität und Konvergenz 15

3 Arbeitsweise von Warrant-Pro-2 (Version 0.2) **21**

3.1 Abweichungsfunktion und optimiertes Teilgebiet 21
3.2 Optimierte Variablen und Interpolation der Randbedingungen 23
3.3 Nichtlineare Optimierung mit NPSOL 5.0 25
3.4 Automatisches Differenzieren mit Adifor 2.0 26

4 Installation und Bedienung von Warrant-Pro-2 (Version 0.2) **29**

4.1 Programmiersprachen 29
4.2 Installation 29
4.3 Elemente und Bedienung der Graphische Oberfläche 30
4.3.1 Haupeingabefenster 30
4.3.2 Eingabefenster zum Festlegen der Startwerte und Schranken der Variablen 33
4.3.3 Fenster mit Ein- und Ausgaben bei der Optimierung nach mehreren Sigmas 34
4.3.4 Fenster für dreidimensionale Ausgaben 35
4.3.5 Terminal 35

5 Beispiele **37**
5.1 Optionspreisberechnung einer Option auf einen Aktienindex (Dax) (ohne Optimierung) . . . 37
5.2 Konvergenzanalyse von NPSOL 5.0 . . . 38

6 Fazit und Ausblick **47**

A Verzeichnisse und Dateien **49**
A.1 Fortran 77 . . . 49
A.1.1 npsolmain.f . . . 50
A.1.2 feva.f . . . 55
A.1.3 g_feva.f . . . 64
A.2 Matlab . . . 85
A.3 Adifor . . . 86
A.4 Sonstige . . . 86

B Bedienungsanleitungen **89**
B.1 Bedienungsanleitung von Adifor 2.0 Revision D . . . 89
B.2 Bedienungsanleitung von NPSOL 5.0 . . . 89

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Optionen bzw. 2-Barrieren-Optionen

Optionen

Beim Kauf einer Option erwirbt der Käufer (Inhaber) das Recht, während eines festgelegten Zeitraumes, der Kontraktlaufzeit, eine bestimmte Menge eines bestimmten Basisobjektes (Underlying) zu einem im voraus festgesetzten Preis, dem Ausübungspreis (Strike), zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option). Bei Optionen vom amerikanischen Typ kann dieses Recht zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit in Anspruch genommen werden, beim europäischen Typ nur zum Ende der Laufzeit. Der Verkäufer (Stillhalter) der Option erhält vom Käufer die Optionsprämie (Wert der Option) und muß dafür bei Ausübung der Option durch den Käufer das vereinbarte Basisobjekt zum festgelegten Preis liefern.

Der Gewinn bzw. der Verlust der beiden Vertragspartner hängt vom Kurs des Basisobjektes bei der Ausübung bzw. beim Ablauf der Laufzeit der Option ab. Liegt bei einer Call-Option der Kurs unter dem Strike, so ist die Option für den Käufer wertlos, da er das Basisobjekt am Markt günstiger kaufen kann als über seine Option. Er hat also die Optionsprämie verloren. Liegt der Kurs dagegen über dem Strike, so wird der Käufer seine Option ausüben und die Differenz zwischen Kurs und Strike einnehmen. Ist diese Differenz größer als die gezahlte Optionsprämie, so hat der Käufer an der Option einen Gewinn erzielt (siehe Abbildung 1.1). Analog ist eine Put-Option für den Käufer wertlos, wenn der Kurs des Basisobjektes bei der Ausübung über dem Strike liegt. Bei niedrigerem Kurs ist der erzielte Ertrag zum Zeitpunkt der Ausübung die Differenz zwischen Strike und Kurs. Der Gewinn bzw. der Verlust des Stillhalters einer Option ist dementsprechend die entgegengesetzte Position zum Inhaber, d.h., der Verlust eines Käufers ist der Gewinn des Stillhalters und umgekehrt.

Natürlich können Optionen zur Spekulation verwendet werden, es gibt aber auch andere Einsatzmöglichkeiten.
Ein Beispiel: Die Lufthansa bestellt im Januar 2003 ein neues Boeing-Flugzeug in den USA

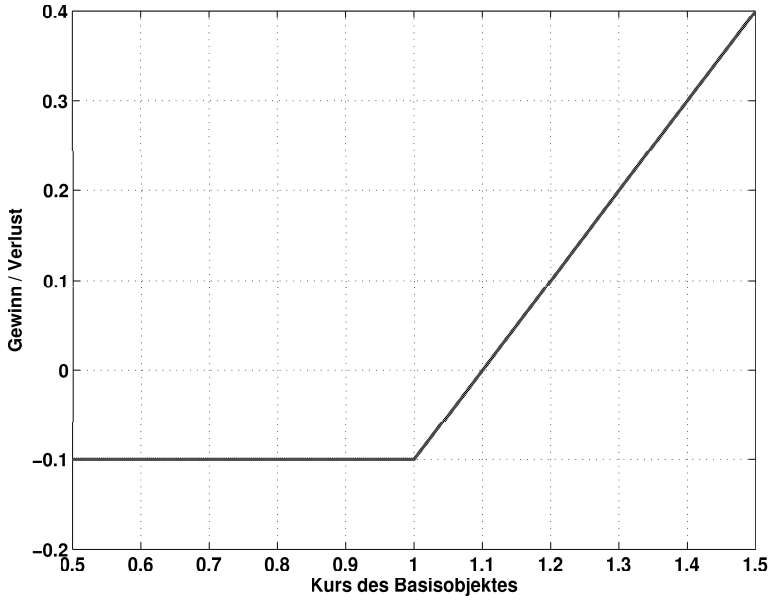

Abbildung 1.1: Gewinn bzw. Verlust des Käufers einer Call-Option in Abhängigkeit vom Kurs des Basisobjektes bei der Ausübung bzw. bei Ablauf der Restlaufzeit. Der Strike liegt hier bei 1 und die Optionsprämie beträgt 0,1.

zum Preis von 230 Mio. US-Dollar. Da erst bei Lieferung im April 2005 bezahlt wird, kann die Lufthansa aufgrund des Wechselkursrisikos den Euro-Kaufpreis nicht kalkulieren. Der Kauf von 230 Mio. US-Dollar im Januar 2003 für ca. 216,2 Mio. Euro (Wechselkurs: 0,94 Euro/US-Dollar) löst das Problem nur unbefriedigend, da viel kreditfinanziertes Kapital gebunden wird. Es ist daher ökonomisch sinnvoller, Call-Optionen auf das Basisobjekt US-Dollar zum Ablauftermin April 2005 mit einem Strike von z.B. 1,00 Euro/US-Dollar zu erwerben. Damit würde sich die Lufthansa gegen einen steigenden US-Dollarkurs absichern und hat die Planungssicherheit, daß das Flugzeug höchstens 230 Mio. Euro kosten wird. Im Gegensatz zu einem Forward oder Future besteht allerdings die Chance das Flugzeug auch preisgünstiger zu bekommen, da eine Option nicht verbindlich ist und im Falle eines sinkenden US-Dollarkurses am Markt eingekauft werden kann.

Eine ausführlichere Beschreibung von Optionen findet sich in [3], [10] und [14].

2-Barrieren-Optionen

Eine 2-Barrieren-Option ist eine Option, bei der eine obere und eine untere Schranke für den Kurs des Basisobjektes festgelegt wird. Wird eine der Schranken während der Laufzeit überschritten, so wird der aktuelle Wert der Option ausgezahlt und die Option verfällt. Beträgt die untere Schranke 0 und die obere Schranke geht gegen unendlich, so wird aus der 2-Barrieren-Option wieder eine „plain vanilla“ Option.

1.2 Optionsgriechen

Der Wert (C) einer Option ist von der Restlaufzeit (t) und dem Kurs des Basisobjektes (p) abhängig. Es gibt einige Größen, die anzeigen, wie stark sich der Wert einer Option bei Änderung dieser Variablen verändert. Dies sind die sogenannten Optionsgriechen, von denen einige nun kurz vorgestellt werden.

Delta:

Delta (Δ) gibt an, wie stark sich der Optionspreis verändert, wenn sich nur der Kurs des Basisobjektes ändert und alle anderen Variablen konstant bleiben.

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial p}$$

Gamma:

Gamma (Γ) gibt an, wie stark sich Delta verändert, wenn sich nur der Kurs des Basisobjektes ändert und alle anderen Variablen konstant bleiben.

$$\Gamma := \frac{\partial^2 C}{\partial p^2}$$

Theta:

Theta (Θ) gibt an, wie stark sich der Optionspreis verändert, wenn sich die Laufzeit verringert und alle anderen Variablen konstant bleiben. Theta wird auch Zeitwertverlust genannt.

$$\Theta := \frac{\partial C}{\partial t}$$

Omega:

Omega (Ω) wird auch Hebel genannt. Es ist der Verstärkungsfaktor, den eine Option gegenüber dem zugrundeliegenden Basisobjekt bzgl. des Gewinnes bzw. des Verlustes hat. Kaufe ich für denselben Betrag Optionen und Basisobjekte dieser Option (z.B. Aktien) und der Wert der Basisobjekte verändert sich um 1%, so verändert sich der Wert der Optionen um ca. $\Omega \cdot 1\%$.

$$\Omega := \frac{\partial C}{\partial p} \cdot \frac{p}{C} = \Delta \cdot \frac{p}{C}$$

1.3 Delta-Hedging

In diesem Abschnitt wird die Möglichkeit betrachtet, wie sich ein Stillhalter von Optionen absichern kann. Auch der Stillhalter (z.B. eine Bank) versucht seine Wertpapierbstände möglichst risikoneutral zu halten, also seine Vermögenswerte unabhängig von Kursschwankungen anzulegen. Nach dem Verkauf einer Option besteht allerdings theoretisch für ihn die Möglichkeit, einen unbegrenzt hohen Verlust zu erhalten (z.B. bei starken Kursgewinnen des Basisobjektes einer Call-Option). Dieses Risiko kann durch sogenanntes Delta-Hedging verringert werden.
Folgendes *Beispiel* erklärt die Funktionsweise des Delta-Hedging: Eine Bank verkauft Call-Optionen auf 2000 Volkswagen-Aktien. Zum aktuellen Zeitpunkt kostet diese Option 2,00 Euro pro Aktie und das aktuelle Delta beträgt 0,5. Steigt die Aktie um 0,10 Euro, so erhöht sich der Wert dieser 2000 Call-Optionen durch den Kursanstieg um etwa (Annahme: Delta sei in diesem kleinen Intervall konstant)

$$2000 \cdot \partial C = \frac{\partial C}{\partial p} \cdot \partial p \cdot 2000 = \Delta \cdot \partial p \cdot 2000 = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 2000\,\text{Euro} = 100\,\text{Euro}.$$

Die Bank verliert also 100 Euro. Dies kann sie vermeiden, indem sie weitere Wertpapiere in ihr Depot aufnimmt, so daß das Produkt aus Delta und deren Anzahl gleich dem Produkt aus 2000 und 0,5 ist. Das Delta der Aktie selbst ist 1; kauft die Bank also 1000 Volkswagen-Aktien, so ist der Wert des Depots aus 1000 Volkswagen Aktien und den 2000 verkauften Call-Optionen Delta-neutral, d.h., schwankt der Aktienkurs, so bleibt der Wert des Depots trotzdem konstant. Im Beispiel hätten die 1000 Volkswagen Aktien bei einem Kursanstieg um 0,10 Euro den Verlust von 100 Euro genau ausgeglichen.

Ein Problem hierbei ist allerdings, daß sich Delta bei schwankenden Kursen und abnehmender Restlaufzeit verändern kann und dies auch in der Regel der Fall ist (siehe Abbildung 1.3). Im Beispiel bedeutet eine Änderung des Deltas der Call-Optionen, daß die Anzahl der Aktien im Depot angepasst werden muß, damit das Depot weiterhin Delta-neutral bleibt. Diese permanente Anpassung ist für die Bank sehr aufwendig, so daß sich die Frage stellt, ob man Optionsscheine mit möglichst konstantem Delta entwerfen kann. Hierfür ist Warrant-Pro-2 entwickelt worden. Mit Hilfe von mathematischen Modellen und Verfahren, die im folgenden näher erklärt werden, sollen Optionen entworfen werden, die ein möglichst konstantes Delta aufweisen.

1.4 Black-Scholes-Gleichung

Um einen gerechten Wertverlauf eines Optionsscheines in Abhängigkeit von dem Kurs des Basisobjektes und der Restlaufzeit zu ermitteln, wird ein geeignetes mathematisches Modell benötigt. Eine recht gute Näherung hierfür liefert die von Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton aufgestellte Black-Scholes-Gleichung.

Mit

$$\begin{array}{rcl} C & := & \text{Wert der Option (Währungseinheit z.B. Euro)} \\ p & := & \text{Kurs des Basisobjektes (Währungseinheit z.B. US-Dollar)} \\ t & := & \text{Restlaufzeit der Option (Einheit: Jahre)} \\ \sigma & := & \text{Volatilität des Basisobjektes (Einheit: } \sqrt{\frac{1}{\text{Jahre}}}) \\ r & := & \text{Aktueller Marktzins (Einheit: } \frac{1}{\text{Jahr}}) \end{array}$$

besagt diese

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t,p) + r\,p\,\frac{\partial}{\partial p} C(t,p) + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,p^2\,\frac{\partial^2}{\partial p^2} C(t,p) - r\,C(t,p) = 0. \tag{1.1}$$

Hierbei handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typ. Die Lösung dieser Gleichung ist eine sogenannte Anfangsrandwertaufgabe, d.h., wird der Wert der Option beim Ablauf der Laufzeit und an zwei Rändern (z.B. der Wert der Option an zwei Barrieren) vorgegeben, so sind alle Preise der Option zwischen diesen beiden Barrieren berechenbar. Also wird eigentlich der Wert einer 2-Barrieren-Option ermittelt. Wie in Abschnitt 1.1 allerdings schon erwähnt, lassen sich diese auch durch geeignete Wahl der Barrieren zu gewöhnlichen Optionen umwandeln. Der Optionspreis, der durch die Black-Scholes-Gleichung ermittelt wird, ist also nur abhängig (siehe Gleichung (1.1)) von den Anfangs- und Randbedingungen, dem Kurs des Basisobjektes (p), der Restlaufzeit (t), dem Marktzins (r) und der zukünftigen Volatilität des Basisobjektes (σ). Dabei dürfen die Währungseinheiten des Optionspreises und des Basisobjektes auch unterschiedlich sein. In Abbildungen 1.2 und 1.3 wird der mit Hilfe der Black-Scholes-Gleichung berechnete Wert einer Call-Option angegeben. Dabei sind r, σ und die Randbedingungen vorgegeben worden.

Für bestimmte Randbedingungen gibt es auch analytische Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung. Setzt man ein konstantes Delta im gesamten Gebiet der Differentialgleichung voraus, so wird aus der Black-Scholes-Gleichung eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die zu der Lösung

$$C(t,p) = p\,\Delta_0 - p_0\,\Delta_0\,\exp(r\,t) \tag{1.2}$$

führt. Dabei ist p_0 der Kurs des Basisobjektes an der unteren Barriere und Δ_0 das festgelegte konstante Delta. In Abbildung 1.4 ist der Wert einer Option mit konstantem Delta dargestellt.

Die Herleitung der Black-Scholes-Gleichung mit Hilfe des Lemmas von Ito kann in [10], [3] und [7], und die Herleitung der analytischen Lösung in [7] nachgeschlagen werden und soll in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden.

1.5 Einführung in Warrant-Pro-2

Wie schon in Abschnitt 1.3 erwähnt wird, sollen mit der Software Warrant-Pro-2 Optionen berechnet werden, deren Delta möglichst konstant ist. Wie gerade angegeben, gibt es

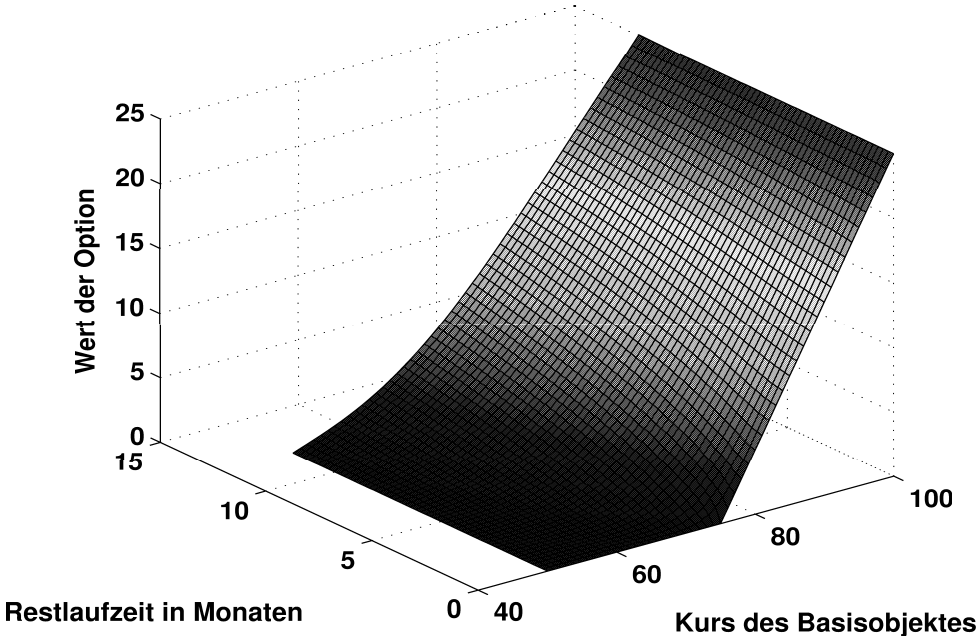

Abbildung 1.2: Wert einer 2-Barrieren Call-Option ermittelt durch Lösung der Black-Scholes-Gleichung mit einem Finite-Differenzen-Verfahren. Die Barrieren liegen bei einem Kurs des Basisobjektes von 50 und 100, der Strike dieser Option beträgt 75 ($r = 0,05$; $\sigma = 0,25$).

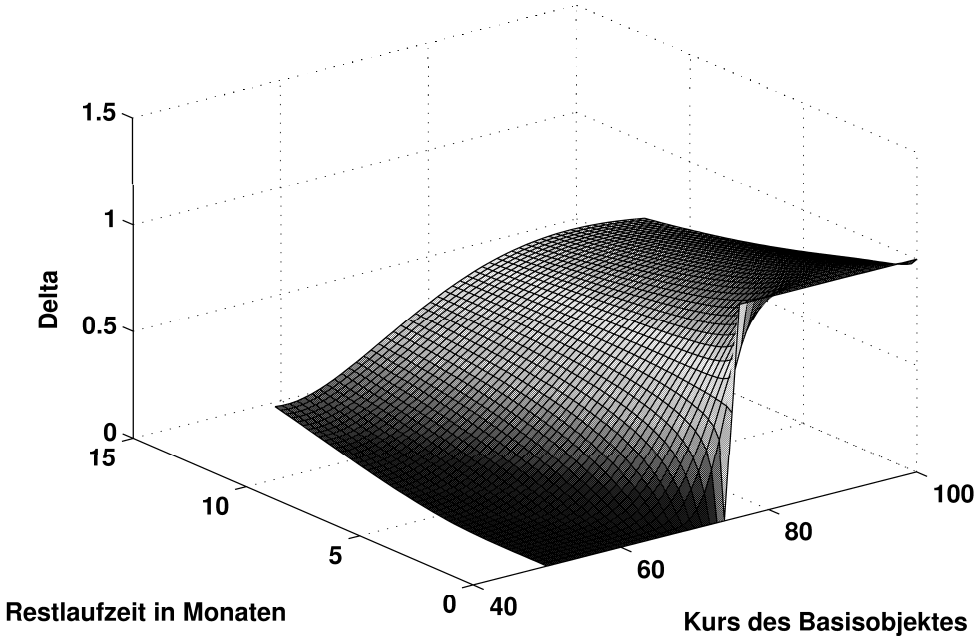

Abbildung 1.3: Delta der Call-Option aus Abbildung 1.2.

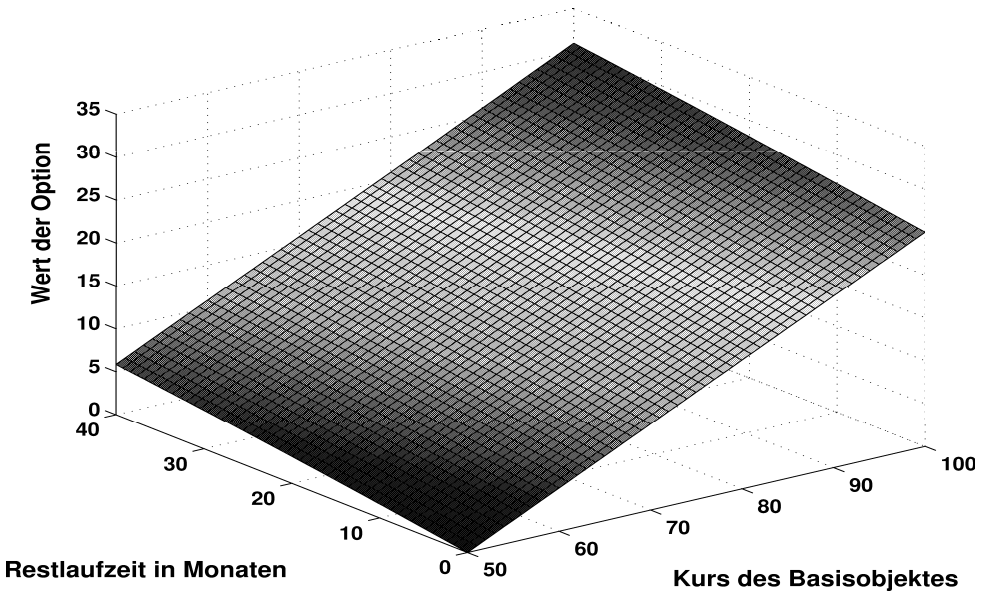

Abbildung 1.4: Wert einer 2-Barrieren-Option mit konstantem Delta ($\Delta = 0,5$; $r = 0,08$). p_0 ist gleich 50 und die obere Barriere liegt bei einem Kurs von 100.

zwar einige analytische Lösungen der Black-Scholes-Gleichung mit konstantem Delta, aber deren Randbedingungen sind sehr unflexibel (siehe Abbildung 1.4). So ist die Auszahlung an den beiden Barrieren bei diesen Lösungen durch eine Exponentialfunktion ($\exp(r\,t)$) bestimmt. Wünscht man eine Option mit z.B. konstanter Auszahlung (unabhängig von der Restlaufzeit t) an den Barrieren, so scheiden die eben erwähnten analytischen Lösungen aus. Auch das Auszahlungsprofil der Option bei Laufzeitende ist durch einen linearen Verlauf zwischen den Barrieren bestimmt. Wünscht man zu diesem Zeitpunkt einen nichtlinearen Verlauf (siehe Abbildung 1.2), so gibt es auch keine exakte analytische Lösung mit konstantem Delta.

Bei Warrant-Pro-2 gibt der Benutzer ein gewünschtes Delta, den Marktzins r, die Volatilität σ und die Position der zwei Barrieren vor. Warrant-Pro-2 versucht dann in einem Gebiet ($t \in [t_1, t_2]$; $p \in [p_1, p_2]$), das ebenfalls vom Benutzer vorgegeben wird, die Abweichung zwischen dem vorgegebenen Delta und dem mit Hilfe der Black-Scholes-Gleichung und einem Finite-Differenzen-Verfahren (siehe Kapitel zwei) berechneten Delta zu minimieren. Dies wird über die Variation der letzten noch nicht vorgegebenen Größen, den Anfangs- und Randbedingungen an den Barrieren und bei Laufzeitende, erreicht. Der Benutzer hat allerdings auch die Möglichkeit in Teilintervallen selbst die Anfangs- und Randbedingungen vorzugeben bzw. obere und untere Schranken für diese aufzustellen. Je mehr der Benutzer allerdings die Anfangs- und Randbedingungen festlegt, desto weniger Freiheiten hat Warrant-Pro-2, um die Abweichung vom gewünschten Delta gering zu halten. Eine genauere Beschreibung der Arbeitsweise von Warrant-Pro-2 wird in Kapitel drei erfolgen.

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

Insgesamt bin ich mit den Resultaten, die Warrant-Pro-2 (Version 0.2) berechnet, sehr zufrieden. Auch bei Problemen mit den bisher maximal möglichen 37 zu optimierenden Variablen findet das Programm in der Regel sehr schnell (in wenigen Minuten oder Sekunden) das gesuchte Minimum. In den von mir getesteten Beispielen gab es keine Konvergenzprobleme, so daß ich sagen kann, daß das Verfahren sehr stabil läuft (auch bei zufälligen Startwerten). Auch die Benutzerfreundlichkeit hat sich durch die graphische Oberfläche im Vergleich zu Version 0.1 sehr stark verbessert. Die Eingabeparameter lassen sich einfach eingeben und die berechneten Resultate sind auf vielfältige Arten einfach visualisierbar. Allerdings sind mir während der Erstellung dieser Diplomarbeit einige Dinge aufgefallen, die meiner Meinung nach noch verbesserungswürdig sind. Die folgenden Punkte könnten daher ein möglicher Ansatz für eine weitere Diplomarbeit sein.

- Ursprünglich sollten die Positionen am Rand, an denen sich die Repräsentanten der Randbedingungen befinden, frei wählbar sein. Um den Aufwand der Diplomarbeit etwas zu reduzieren, wurde diese Anforderung auf drei unterschiedliche Diskretisierungsmöglichkeiten reduziert. Bei diesen Diskretisierungsmöglichkeiten ist die Position der Repräsentanten äquidistant über die Ränder verteilt, dabei liegen an allen drei Rändern (obere Barriere, untere Barriere und Laufzeitende) gleich viele Repräsentanten (vier, sieben oder dreizehn). Da häufig nur auf einem oder zwei Rändern oder dort sogar nur in einigen Abschnitten optimiert wird, sollte diese unflexible Positionswahl der Repräsentanten der Randbedingungen verbessert werden. Zumindest sollte eine weitere Diskretisierung mit 73 Punkten als Repräsentanten implementiert werden. Noch besser wäre eine freie Wahl der Anzahl und der Position der einzelnen Repräsentanten der Randbedingungen. Dazu muß natürlich die graphische Oberfläche modifiziert werden, um diese zusätzlichen Parameter einzugeben. Im Fortran-Programm muß die Datei feva.f modifiziert werden, da dort die Berechnung der Optionswerte auf den Gitterpunkten, die auf dem Rand des Gebietes liegen, durch Interpolation durchgeführt wird.

- Die Kombination aus Hermite- und Spline-Interpolation kann bisher nur für den Verlauf der Randbedingungen, die einer Call-Option bei Laufzeitende ähneln, sinnvoll

durchgeführt werden. Es wäre wünschenswert, wenn bei diese Interpolationsmethode auch auf Randbedingungen, die einer Put-Option am Laufzeitende ähneln, eingegangen werden würde. D.h., bei der Interpolation der Randwerte müßte auch überprüft werden, ob von der oberen Barriere ausgehend Optionswerte mit 0 vorgegeben werden, und dementsprechend das Intervall mit der Hermite-Interpolation gewählt werden.

- Die Eingaben der graphischen Oberfläche können noch benutzerfreundlicher gestaltet werden. So sind bisher noch Fehleingaben möglich, bei denen z.B. Buchstaben eingegeben werden, wo Zahlenwerte erforderlich sind. Diese Fehleingaben sollten direkt bei ihrer Eingabe abgefangen werden. Eine sehr unangenehme Fehleingabe ist auch die Angabe von Nachkommastellen die von den Vorkommastellen durch ein Komma getrennt werden. Die Trennung muß in den Eingaben durch einen Punkt erfolgen, da sonst der Nachkommateil einfach abgeschnitten wird.

- Die Eingabe des Teilgebietes, in dem Delta optimiert wird, kann noch verbessert werden. Bei Version 0.2 erfolgt die Eingabe (wie Version 0.1) in Gitterkoordinaten, die dem Diskretisierungsgitter des Crank-Nicholson-Verfahrens entsprechen. Die Eingabe wäre schöner, wenn der Benutzer ein entsprechendes Intervall der Restlaufzeit und des Basisobjektkurses vorgibt.

- Es fehlt noch eine Sicherheitsabfrage beim Speichern eines Zustandes von Warrant-Pro-2. So kann es leicht passieren, das der Mausklick zum Speichern einen Speicherplatz zu hoch oder niedrig erfolgt. Dadurch wird ein eventuell noch benötigter Zustand überschrieben.

- Alle Programmteile von Warrant-Pro-2 (Version 0.2) sollen auch noch für ein Microsoft Windows Betriebssystem kompiliert werden. Damit wäre Warrant-Pro-2 auch auf einem Windows-Rechner ohne Matlab lauffähig. Dafür wird ein Fortran- und ein Matlab 6 (Release 13) kompatibler Matlab-Kompiler für MS-Windows benötigt.

- Die Konvergenzeigenschaften von NPSOL können noch deutlich intensiver untersucht werden. Unter welchen theoretischen Voraussetzungen konvergiert NPSOL? Warum konvergiert der Optimierer bei unterschiedlichen Interpolationsmethoden mit so großen Geschwindigkeitsunterschieden?