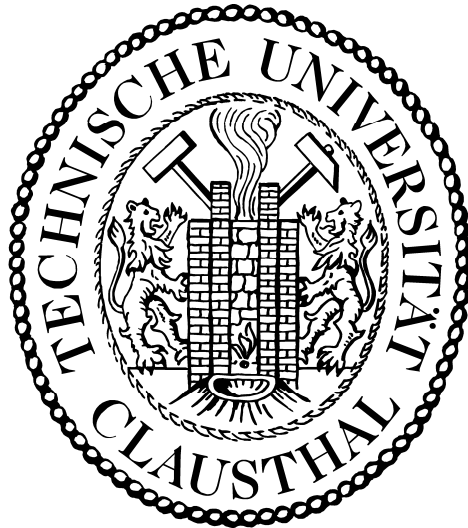


Technische Universität Clausthal  
Institut für Mathematik



Diplomarbeit

**Untersuchung und Implementierung  
zweier Crank-Nicolson-Verfahren  
zur Simulation einer  
dreidimensionalen Walzenerwärmung**

Diana Rohrberg

September 2003

# Diplomarbeit

Untersuchung und Implementierung zweier Crank-Nicolson-Verfahren  
zur Simulation einer dreidimensionalen Walzenerwärmung

**Diana Rohrberg**

Technische Universität Clausthal

Institut für Mathematik

in Zusammenarbeit mit dem

Institut für Metallurgie

AG Werkstoffumformung

Prof. Dr.-Ing. Heinz Palkowski

August 2003

Aufgabensteller:

Prof. Dr. Michael H. Breitner, Universität Hannover

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Walter Klotz, Technische Universität Clausthal

Betreuer:

Dipl.-Math. Torsten Sander, Technische Universität Clausthal

Diese Diplomarbeit wurde gefördert durch die Thyssen Krupp Stahl AG, Duisburg.  
Jedwede Verwertung dieser Diplomarbeit bedarf der schriftlichen Zustimmung.

Das Daumenkino wurde mit Ceetron GLview Pro Version 6.4 erstellt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Michael H. Breitner für die Formulierung der Aufgabenstellung und die immer hilfsbereite Unterstützung während der Arbeit bedanken. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Walter Klotz für die Begutachtung sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Palkowski für die freundliche Unterstützung dieser Arbeit. Ein weiterer Dank gilt Herrn Dipl.-Math. Torsten Sander, der mir in allen Fragen geduldig zur Seite stand.

Ebenso bedanke ich mich bei der Thyssen Krupp Stahl AG, Duisburg für die Möglichkeit diese Arbeit in ihrem Hause anzufertigen.

Nicht zuletzt danke ich natürlich meinem Mann Matthias und meinem Sohn Lennart für die Liebe und Geduld, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Metallische Eigenschaften . . . . .	2
2.1.1	Kristalliner Aufbau . . . . .	2
2.1.2	Formänderungen von Einkristallen . . . . .	3
2.1.3	Verfestigung . . . . .	5
2.1.4	Entfestigung . . . . .	6
2.2	Umformung durch Warmwalzen . . . . .	6
2.2.1	Grundbegriffe . . . . .	6
2.2.2	Walzspaltform . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>9</b>
3.1	Wärmebilanz . . . . .	9
3.2	Diffusionsgleichung . . . . .	10
3.3	Randbedingungen . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Finite-Differenzenverfahren</b>	<b>14</b>
4.1	Linienmethode . . . . .	15
4.1.1	Randbedingungen . . . . .	17
4.2	Eigenschaften der Differenzenverfahren . . . . .	18
4.2.1	Konsistenz . . . . .	19
4.2.2	Konvergenz . . . . .	19
4.2.3	Stabilität . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Modellierung</b>	<b>21</b>
5.1	Mathematische Aspekte . . . . .	21
5.2	Walzenrotation . . . . .	21
5.3	Walzgut und Kühlung . . . . .	22
5.3.1	Materialparameter . . . . .	23

<b>6</b>	<b>Ansatz mit dem Crank-Nicolson-Verfahren</b>	<b>24</b>
6.1	Ein 3-dimensionales Crank-Nicolson-Verfahren in Zylinderkoordinaten für die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	24
6.1.1	Einarbeitung der Randbedingungen und zyklischen Symmetriebedingungen . . . . .	26
6.2	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	29
6.3	Konkrete Implementierung . . . . .	31
6.3.1	Super LU . . . . .	31
6.3.2	SparseLib++ . . . . .	31
6.3.3	MV++ . . . . .	32
6.3.4	Anmerkungen zur Implementierung . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Splittingverfahren</b>	<b>33</b>
7.1	Einführung in Splittingverfahren . . . . .	33
7.2	Vorstellung der Splitting-Methoden . . . . .	35
7.2.1	Die allgemeine AD Methode . . . . .	35
7.2.2	Die allgemeine LOD Methode . . . . .	37
7.2.3	Korrekturterme für die AD Methode . . . . .	37
7.2.4	Korrekturterme für die LOD Methode . . . . .	38
7.2.5	Die von Rückwärts-Euler AD- bzw. LOD-Methoden abgeleitete AD- II-Methode . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Ansatz mit der AD-II Methode</b>	<b>41</b>
8.1	Differenzgleichung in Zylinderkoordinaten . . . . .	41
8.1.1	Einarbeitung der Randbedingungen und zyklischen Symmetriebedingungen . . . . .	43
8.2	Lösung der linearen Gleichungssysteme . . . . .	46
8.3	Konkrete Implementierung . . . . .	48
8.3.1	Bandlöser und Super LU . . . . .	48
8.3.2	Anmerkungen zur Implementierung . . . . .	48
<b>9</b>	<b>Vergleich des Crank-Nicolson-Verfahren und des Splittingverfahrens</b>	<b>51</b>
9.1	Speicherkomplexität . . . . .	51
9.1.1	Crank-Nicolson-Verfahren . . . . .	51
9.1.2	Splittingverfahren . . . . .	52
9.2	Zeitkomplexität . . . . .	53
9.2.1	Crank-Nicolson-Verfahren . . . . .	53
9.2.2	Splittingverfahren . . . . .	54
9.3	Ordnungsbestimmung . . . . .	55
<b>10</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>59</b>

<b>A</b>	<b>Die Struktur der Quelltexte</b>	<b>61</b>
A.1	Klassenhierarchie . . . . .	62
	A.1.1 Klassen des Modells . . . . .	62
	A.1.2 Externe Klassen . . . . .	62
A.2	Struktur prog6 . . . . .	62
A.3	Struktur prog11 . . . . .	65
<b>B</b>	<b>Die Struktur weiterer wichtiger Dateien</b>	<b>75</b>
B.1	CNsolver . . . . .	75
B.2	boundaries . . . . .	81
B.3	solvers . . . . .	83
B.4	matrix_vector . . . . .	86
B.5	Weitere Dateien . . . . .	89
	B.5.1 mathtypes.h . . . . .	89
	B.5.2 geometrie.h . . . . .	89
	B.5.3 functypes.h . . . . .	89

# Kapitel 1

## Einleitung

Beim Warmwalzen geht ständig Wärme vom umzuformenden Werkstück auf die Walzen über. Aufgrund dessen kommt es zu einer thermischen Ausdehnung der Walzen, was eine Änderung der Walzgeometrie und somit auch des Walzgutes zur Folge hat. Dies kann zur Verbesserung des Produktes genutzt werden. Hierfür ist aber eine genaue Kenntnis des Temperaturgeschehens in den Walzen nötig, damit über eine gezielte Kühlung der Wärmehaushalt kontrolliert werden kann.

Um das Zusammenwirken von Erwärmen und Abkühlen für eine Arbeitswalze beschreiben zu können, wurde in der AG Werkstoffumformung des Instituts für Metallurgie der TU Clausthal das computergestützte Modell „Rollheat-3D“ entwickelt. Dieses berechnet die dreidimensionale Temperaturverteilung einer Arbeitswalze über mehrere Walzzyklen.

Hierfür wurde die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung mit temperaturkonstanten Materialparametern in Zylinderkoordinaten gelöst. Die Diskretisierung erfolgte durch explizite Finite-Differenzen, denn dieses Verfahren ist einfach zu implementieren und sehr schnell. Leider ist es nur begrenzt stabil.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit soll nun der bestehende Rechenkern des Programms verbessert werden. Hierfür soll das semi-implizite Crank-Nicolson-Verfahren zunächst in seiner ursprünglichen und anschließend in Form eines eindimensionalen Splittingverfahrens implementiert werden.



# Kapitel 10

## Fazit und Ausblick

Insgesamt bin ich mit den Ergebnissen, die die Programme für das Crank-Nicolson- und das Splittingverfahren berechnen, zufrieden, auch wenn der Zeitgewinn des Splittingverfahrens gegenüber dem Crank-Nicolson-Verfahren nicht in dem erwarteten Maße eintrat. Beide Programme liefern für das hier gestellte Problem exakt dieselben Lösungen, insbesondere wurde auch ein analytischer Spezialfall berechnet, so dass davon ausgegangen werden kann, dass sie richtig arbeiten.

Während der Erstellung dieser Arbeit sind mir jedoch verschiedene Dinge aufgefallen, die noch verbesserungswürdig sind beziehungsweise untersucht werden sollten.

- Beim Lösen der Wärmeleitungsgleichung mittels des Crank-Nicolson-Verfahrens muss aufgrund der einzuarbeitenden Cauchy-Randbedingungen, welche zu Modifikationen der Hauptdiagonale der Systemmatrix führen, diese immer wieder neu faktorisiert werden. Hier wäre es interessant zu untersuchen, ob ein Beibehalten der Systemmatrix für einige Schritte das Ergebnis stark beeinflussen würde. Wäre das nicht der Fall, würde das den Zeitaufwand des Crank-Nicolson-Verfahrens reduzieren.
- Der Fill-in der Matrizen  $L$  und  $U$  der Faktorisierung sollte bestimmt werden.
- Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete AD-II-Splitting benötigt einen Startschritt, der hier als voller Crank-Nicolson-Schritt implementiert wurde. Damit wird die mögliche zu bearbeitende Größe eines Problems eingeschränkt, auf Probleme der Größe, die schon das Crank-Nicolson-Verfahren lösen kann. Desweiteren wird der Zeitaufwand für eine kleine Anzahl von Durchläufen durch den Startschritt beeinflusst, der einen Aufwand von  $\mathcal{O}(n^3)$  gegenüber dem Aufwand  $\mathcal{O}(n^2)$  des Splittingverfahrens hat. Es wäre hier zu untersuchen, ob es sinnvoll wäre, einen anderen Startschritt zu wählen.
- Desweiteren wäre es interessant, die Unstimmigkeiten bei der Bestimmung der Fehlerordnung beider Verfahren auszuräumen.
- Der bestehende Programmcode ist weitestgehend prozedural und nutzt kaum objektorientierte Ansätze. Es wäre zu untersuchen, inwieweit objektorientierte Ansätze

zur Modularisierung des Codes eingesetzt werden können, ohne die Rechenzeit zu belasten.

- Bei der Änderung von Parametern muss der Quellcode geändert und das Programm neu übersetzt werden. Daher sollten die Parameter zur Laufzeit oder zum Programmstart eingelesen werden können. In diesem Zusammenhang sollte über eine graphische Benutzeroberfläche nachgedacht werden.