Numerische Optionsbepreisung durch Monte-Carlo-Simulation und Vergleich mit dem Black-Scholes-Modell

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades „Bachelor of Science (B.Sc.)“ im Studiengang Wirtschaftswissenschaft der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Leibniz Universität Hannover

vorgelegt von

Name: Ahlborn Vorname: Dennis

[redacted] [redacted] [redacted] [redacted]

Prüfer: Prof. Dr. M. H. Breitner

Ort, Datum: Isernhagen, 08. August 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Finanzmärkte weisen in den vergangenen Jahrzenten eine rasant steigende Produktinnovationsgeschwindigkeit auf. Optionen als derivative Finanzinstrumente gehören zu den am intensivsten gehandelten Finanztiteln der Gegenwart.

Die zentrale Aufgabe in Bezug auf den Handel mit Derivaten ist es, für die vielfältigen Ausprägungsformen objektiv ermittelbare, gültige Preise zu bestimmen. Die Optionspreistheorie hat sich aufgrund der herausragenden Bedeutung als Finanzinstrument zu einem der wichtigsten Teilbereiche der empirischen Kapitalmarkforschung entwickelt.

Die wesentliche Problematik der Optionsbepreisung besteht darin, einen theoretischen Wert der Option in Abhängigkeit von möglichen zukünftigen Kursentwicklungen des Basiswertes zu ermitteln. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Vergleich der Optionspreise durch das Black-Scholes-Modell und die Bepreisung durch Monte-Carlo-Simulation. Die grundlegenden Unterschiede der verwendeten Modelle sind zum einen, dass das Black-Scholes-Modell eine analytische Methode ist, die Monte-Carlo-Simulation ein numerisches Verfahren darstellt. Zum anderen wird für die Prognose der Entwicklung des Basiswertes der Option für die Monte-Carlo-Simulation ein stochastischer Prozess verwendet, der nicht der Normalverteilungsannahme bzgl. der Kursentwicklung des Black-Scholes-Modells entspricht.

Dieser Vergleich wird angestellt, da die Normalverteilungsannahme für die Rendite von Basiswerten empirisch wiederlegt ist, aufgrund der einfachen Berechnung in der Praxis dennoch häufig Anwendung findet. Ziel dieser Arbeit ist es, eine mögliche Eignung der Verwendung eines alternativen stochastischen Prozesses, der keine Normalverteilung der Renditen annimmt, zur Bepreisung von Optionen durch Monte-Carlo-Simulation im Vergleich mit den Optionspreisen des Black-Scholes-Modells zu betrachten.

In Kapitel 2. erfolgt zunächst eine allgemeine Einführung in die Thematik derivativer Finanzinstrumente sowie die grundlegenden Marktannahmen der Optionsbepreisung. Kapitel 3. führt den dem Black-Scholes-Modell unterliegenden Modellrahmen des stochastischen Prozesses der Kursentwicklung ein und betrachtet die Eignung der Normalverteilungsannahme bzgl. realer

Kursentwicklungen. Aufbauend auf dem in Kapitel 3. eingeführten stochastischen Prozess, wird in Kapitel 4. das Black-Scholes-Modell und die Verwendung zur Optionsbepreisung erläutert. Dabei wird speziell auf einen zentralen Parameter des Modells, die Volatilität, genauer eingegangen. Das Kapitel 5. führt detailliert in die Thematik der Monte-Carlo-Simulation zur Optionsbepreisung ein. Zunächst werden allgemeine Grundlagen der Simulation beschrieben. Darauf folgend wird der zugrunde liegende Bepreisungs-Algorithmus zunächst allgemein für den der Black-Scholes-Formel unterliegenden stochastischen Prozess erklärt. Dann folgt die Erläuterung der Konstruktion des alternativen stochastischen Prozesses, sowie die entsprechende Modifikation der Standard-Monte-Carlo-Simulation zur Monte-Carlo-Simulation mit alternativem stochastischem Prozess. In Kapitel 6. erfolgt ein empirischer Vergleich der stochastischen Prozesse, sowie der simulierten bzw. berechneten Optionspreise der beiden Modelle. Das Kapitel 7. schließt die Arbeit mit Fazit und Ausblick ab.

1.1. Auswertungsprogramm

Sämtliche Berechnungen bzw. Simulationen und darauf basierende Visualisierungen wurden mit der Software MATLAB® R2013a durchgeführt. Die benötigten Methoden wurden entsprechend der theoretischen Ausführungen der Kapitel 3., 4. und 5. implementiert und sind auf der beiliegenden CD-ROM mit der Aufschrift „Matlab-Quellcodes“ enthalten.

2. Einführung in derivative Finanzinstrumente

2.1. Grundlagen

Derivate sind Termingeschäfte, die sich dadurch auszeichnen, dass eine zeitliche Trennung zwischen Verpflichtungs- und Erfüllungsgeschäft besteht. Das Verpflichtungsgeschäft fixiert die Konditionen für eine ggf. zu einem späteren Zeitpunkt erfolgende Abwicklung. Allgemein wird zwischen bedingten und unbedingten Termingeschäften unterschieden, wobei letztere u. a. als Forwards, Futures und Swaps bekannt sind.[1] Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich bedingte Termingeschäfte in Form von Optionen näher betrachtet.

[1] Vgl. Breuer et al. (2010), S. 56.

7. Fazit und Ausblick

Diese Arbeit hat sich mit der Problematik der Annahme der Normalverteilung für die Entwicklung von Aktienkursen und dem darauf basierenden Black-Scholes-Modell zur Optionsbepreisung befasst. Aufbauend auf der Tatsache, dass historische Aktienkursentwicklungen die Annahme der Normalverteilung verwerfen, wurde ein alternativer stochastischer Prozess konzipiert, der die tatsächliche Entwicklung von Aktienkursen realitätsnäher berücksichtigt. Der durch Simulation der Prozesse erfolgte Vergleich der Aktienkurse für einen Zeitraum von 252 Handelstagen hat gezeigt, dass der alternative stochastische Prozess aus der der Simulation unterliegenden linksschiefen Verteilungsfunktion einen wesentlich höheren Erwartungswert resultiert. Zudem wird durch die höhere Wahrscheinlichkeit extremer Kursveränderungen eine höhere Streuung der Kurse abgebildet. Die simulierten Kurse sind jedoch insofern problematisch, als dass die historische Entwicklung vollständig in die Zukunft projiziert wird und somit die Markov-Eigenschaft, die Irrelevanz historischer Kursentwicklungen, ignoriert wird.

Die Bepreisung von Optionen auf Basis der mit dem alternativen stochastischen Prozess simulierten Kursentwicklungen weisen einen konvergenten Verlauf mit steigender Simulationsanzahl auf, sodass der wahre Wert der Simulation verlässlich approximiert wird. Deutlich wird jedoch, dass selbst zur Bepreisung von Standard-Optionen sehr hohe Simulationsanzahlen benötigt werden, um minimale Abweichungen vom wahren Wert zu erhalten. Eine wesentliche Schwäche der simulierten Preise ist zudem die Nichterfüllung der Put-Call-Parität, sodass die Preise keinesfalls markttauglich sind. Der Vergleich der berechneten Black-Scholes und der simulierten Monte-Carlo Standard-Optionspreise hat bei Variation der Restlaufzeit sowie des Ausübungspreises einen allgemein ähnlichen Verlauf ergeben, jedoch steigt die Differenz der Preise mit zunehmender Laufzeit. Zudem liegen die Call-Preise der Monte-Carlo-Simulation systematisch oberhalb und die Put-Preise systematisch unterhalb der zugehörigen Black-Scholes-Preise. In Bezug auf die Variation der Restlaufzeit ist beim relativen Verlauf der Monte-Carlo Put-Preise zudem ein, im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärter, grundlegend abweichender Verlauf ggü. den Black-Scholes-Preisen zu beobachten. Die simulierten Monte-Carlo-Preise der Put-Optionen, die im Geld sind, sind mit kürzerer Laufzeit absolut teurer als lange Laufzeiten.

Abschließend ist festzuhalten, dass der verwendete stochastische Prozess der Monte-Carlo-Simulation geeignet ist, um von der Normalverteilung abweichende Kursentwicklungen zu simulieren und darauf basierend Optionen zu bepreisen. Um das implementierte Vorgehen jedoch validieren zu können, müsste ein weiteres Vorgehen darin bestehen, die Ursachen der Nichterfüllung der Put-Call-Parität zu identifizieren, sowie die Ursache des Preisverlaufs der Monte-Carlo Put-Preise zu untersuchen. Darüber hinaus sollte der Einfluss der Wahl der Anzahl der Klassen für die Konstruktion der Verteilungsfunktion auf die simulierten Kurse und Optionspreise geprüft und ggf. adaptiert werden.